

0.1 Morita Equivalence

Definition 0.1.1

環 R, S が森田同値 (Morita equivalent) であるとは、 $\mathbf{Mod}_R, \mathbf{Mod}_S$ (右側加群) が Additive category として equivalence of category となることである。

Remmark 0.1.2

R, S が isomorphic in **Ring** であれば、 R, S は森田同値である。

Example 0.1.3

$n \geq 1$ とする。環 R とその全行列環 $M_n(R)$ は森田同値である。

proof) $F : \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_{M_n(R)}$ を次のように定義する。 $X \in \mathbf{Mod}_R$, $f \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(X, Y)$ に対し、

$$F(X) = X^n \quad , \quad F(f) = f^n \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Mod}_{M_n(R)}}(X^n, Y^n)$$

ただし、 X^n における和と $M_n(R)$ における作用は、

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$xA = (x_1, \dots, x_n)(a_{ij})$$

と行列の和・積と同様に定義する。 $F(f)$ は準同型になり、これは Additive functor であることも簡単に示せる。

$G : \mathbf{Mod}_{M_n(R)} \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$ は以下のように定義する。 $U \in \mathbf{Mod}_{M_n(R)}$, $g \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Mod}_{M_n(R)}}(U, V)$ に対し、

$$G(U) = UE_{11} \quad , \quad G(g) = g \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Mod}_{(R)}}(UE_{11}, VE_{11})$$

ただし、 $UE_{11} = \{uE_{11} \in U \mid u \in U\}$ であり、 E_{ij} とは (i, j) 成分のみが 1 でほかをすべて 0 であるような n 次正方形行列とする。このとき和と作用は、

$$uE_{11} + sE_{11} = (u + s)E_{11} \quad , \quad uE_{11}r = \{u(rE)\}E_{11}$$

により定義すれば、 $G(g)$ が準同型となり、 G も Additive functor である。

$G \circ F : \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$ について考えると、

$$G \circ F(X) = X^n E_{11} = \{(x, 0, \dots, 0) \in X^n \mid x \in X\}$$

であるため、 $\alpha_X : X \longrightarrow G \circ F(X)$ を $x \mapsto (x, 0, 0, \dots, 0)$ で定義するとこれは natural な isomorphism である。

逆に $F \circ G : \mathbf{Mod}_{M_n(R)} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{M_n(R)}$ を考えると、

$$F \circ G(U) = (UE_{11})^n$$

であるが、 $\beta_U : U \longrightarrow F \circ G(U)$ を $u \mapsto (uE_{11}, (uE_{21})E_{11}, \dots, (uE_{n1})E_{11})$ で定義する。これが準同型であること、特に作用と可換になっているのかを確かめてみる。

$A \in M_n(R)$ に対し、

$$\begin{aligned} \beta_U(uA) &= (uAE_{11}, uAE_{21}, \dots, uAE_{n1}) \\ &= \left(u \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, u \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, u \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned} \beta_U(u)A &= (uE_{11}, uE_{21}, \dots, uE_{n1}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= (uE_{11}a_{11} + uE_{21}a_{21} + \cdots + uE_{n1}a_{n1}, \dots, uE_{11}a_{1n} + uE_{21}a_{2n} + \cdots + uE_{n1}a_{nn}) \\ &= (ua_{11}E_{11} + ua_{21}E_{21} + \cdots + ua_{n1}E_{n1}, \dots, ua_{1n}E_{11} + ua_{2n}E_{21} + \cdots + ua_{nn}E_{n1}) \\ &= \left(u \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, u \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, u \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \right) \\ &= \beta_U(uA) \end{aligned}$$

よってこれは natural な準同型であるので、あとは全単射を示せばよい。

まずは単射を示す。 $u \in U$ に対し、 $\beta_U(u) = 0$ とする。つまり、 $uE_{i1} = 0$ ($1 \leq i \leq n$) である。これより、

$$uE_{ii} = (uE_{i1})E_{1i} = 0$$

となる。よって、

$$u = uE = \sum_{i=1}^n (uE_{ii}) = 0$$

続いて全射を示す。 $u = (u_1E_{11}, u_2E_{11}, \dots, u_nE_{11}) \in F \circ G(U)$ をとる。 $v_i = u_iE_{1i} \in U$ を考えると、

$$\beta_U(v_i) = (u_iE_{1i}E_{11}, \dots, u_iE_{1i}E_{n1}) = (0, \dots, 0, u_iE_{11}, 0, \dots, 0)$$

これより、 $v = \sum_{i=1}^n v_i$ とおけば、 $\beta_U(v) = u$ である。

□